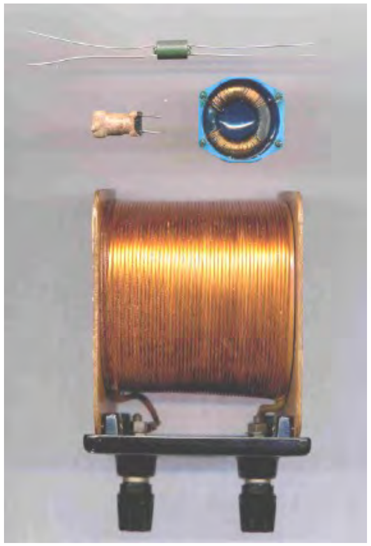
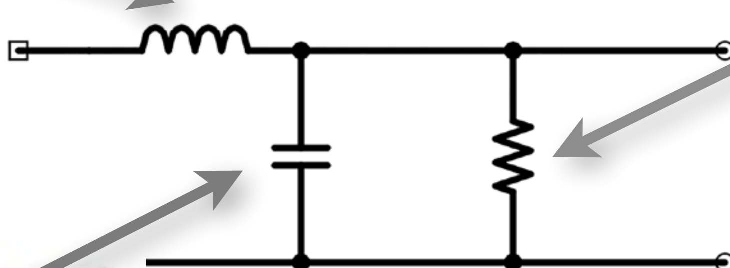
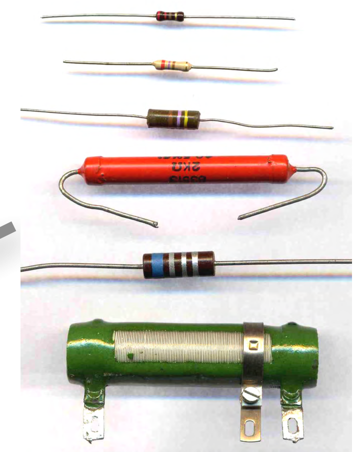

BRITISH
PATHÉ
TACOMA BRIDGE
COLLAPSE
PATHE GAZETTE

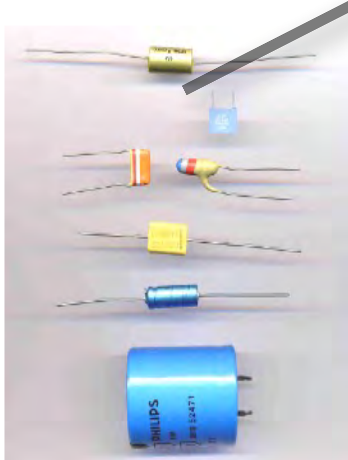
CIRCUITS I
CIRCUITS ELECTRIQUES (RCL)
OSCILLATEUR HARMONIQUE

D. Mari





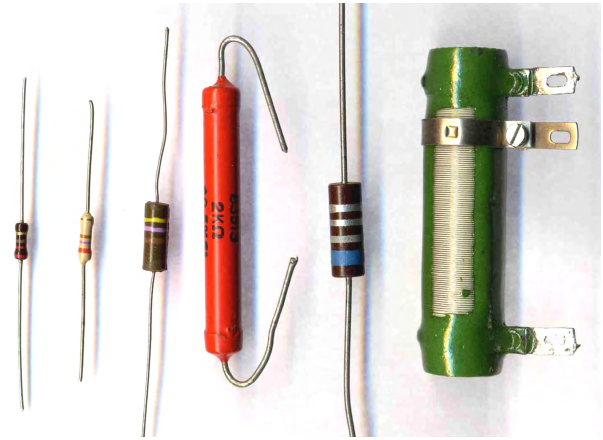




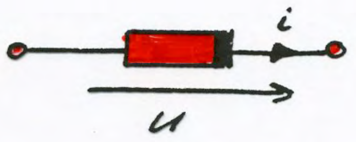
EQUATIONS CONSTITUTIVES DES ELEMENTS PASSIFS

Equation constitutive

$$\boxed{f(u, i) = 0}$$



Résistances

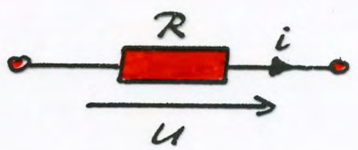


$$\boxed{u = f(i)}$$

u = le voltage ou tension [volt = V]

i = le courant [ampere = A]

Résistance linéaire :

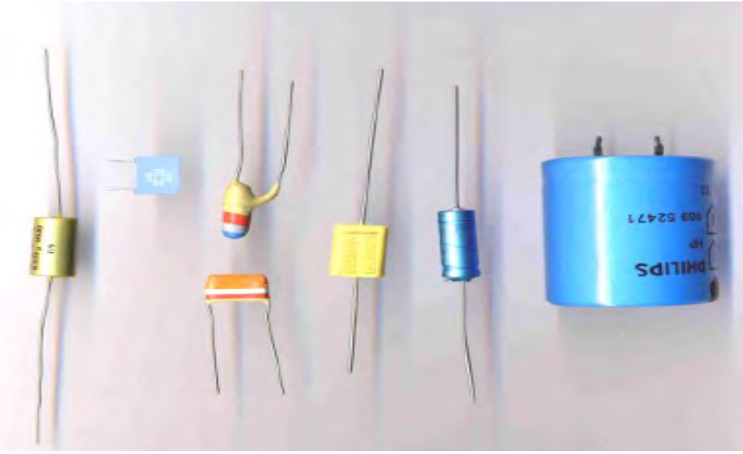


$$\boxed{u = R \cdot i}$$

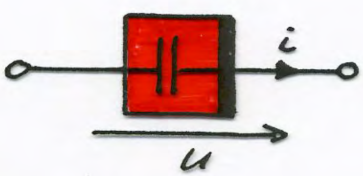
R = la résistance [ohm = Ω]

EQUATIONS CONSTITUTIVES DES ELEMENTS PASSIFS

Condensateurs

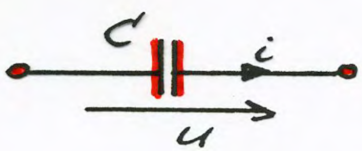


q = la charge électrique [coulomb = C].



$$\boxed{q = f(u) \quad avec \quad i = \frac{dq}{dt}}$$

<u>*Capacités linéaires:*</u> $q = C \cdot u \quad \Rightarrow \quad \frac{dq}{dt} = i = C\frac{du}{dt}$

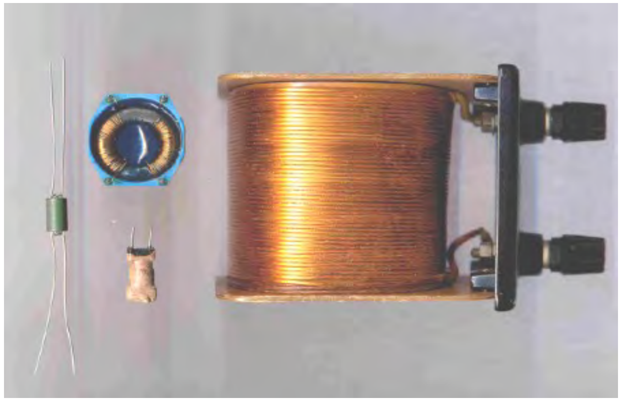


$$\boxed{i = C\frac{du}{dt}}$$

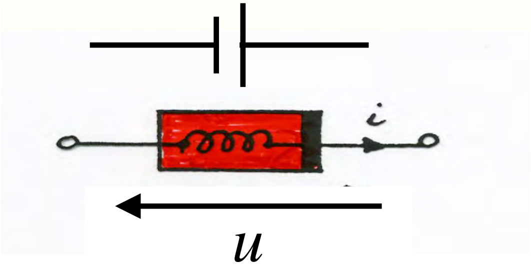
C = capacité [farad = F]

EQUATIONS CONSTITUTIVES DES ELEMENTS PASSIFS

Inductances



ϕ = le flux magnétique [weber = Wb]



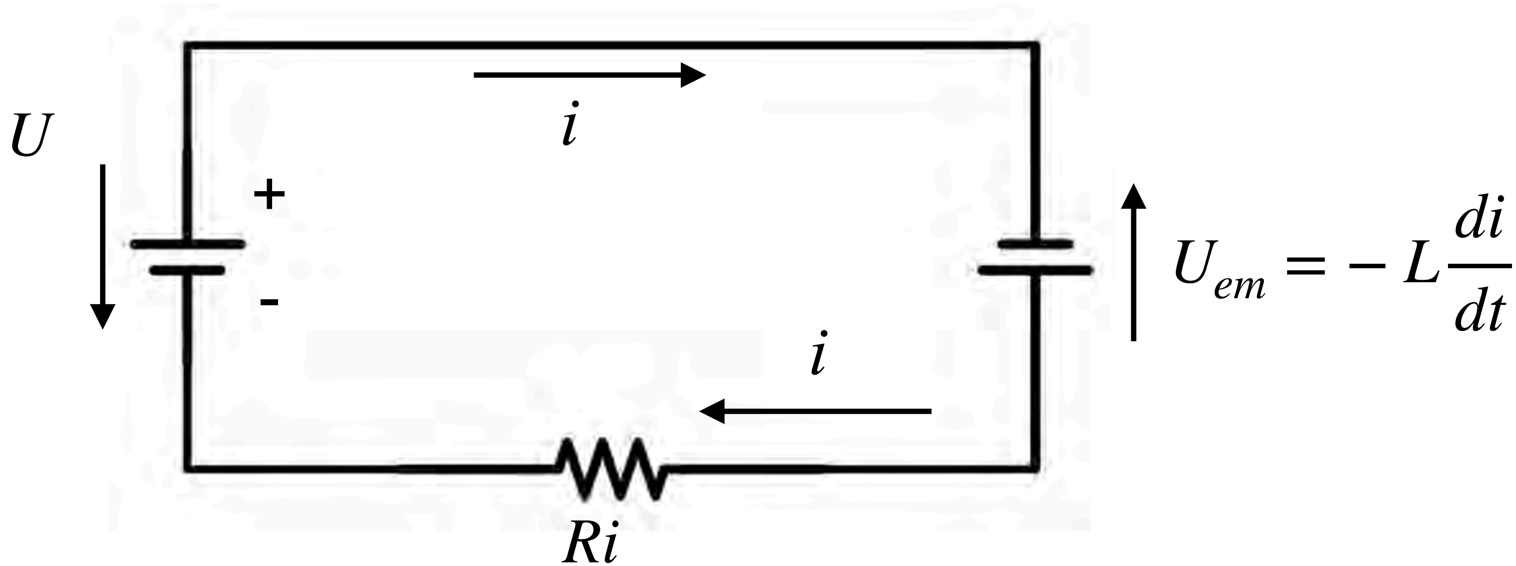
$$\boxed{\phi = f(i) \text{ avec } u = -\frac{d\phi}{dt}}$$

<u>*Inductance linéaire:*</u> $\phi = L \cdot i \quad \Rightarrow \quad -\frac{d\phi}{dt} = u = -L\frac{di}{dt}$

EQUATIONS CONSTITUTIVES DES ELEMENTS PASSIFS

Rappel: inductance dans un circuit

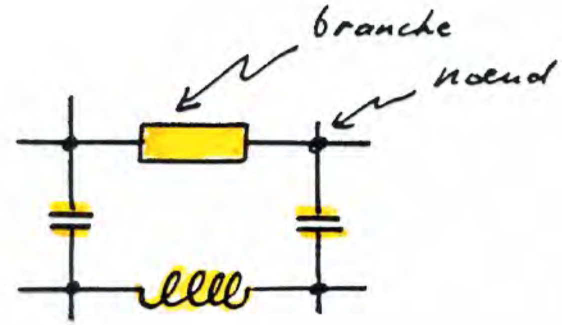
$$U_{em} = -N\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$



$$\boxed{U_{em} = u_L = L\frac{di}{dt}}$$

EQUATIONS DE KIRCHOFF D’UN RESEAU

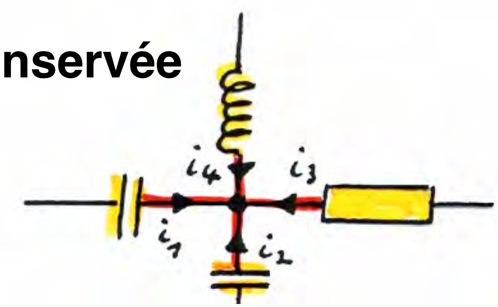
Soit un circuit électrique composé d'éléments passifs constituant les *branches du réseau* et reliés entre eux aux *noeuds du réseau*



Pour étudier le comportement électrique d'un tel réseau, on doit faire appel aux équations de Kirchhoff:

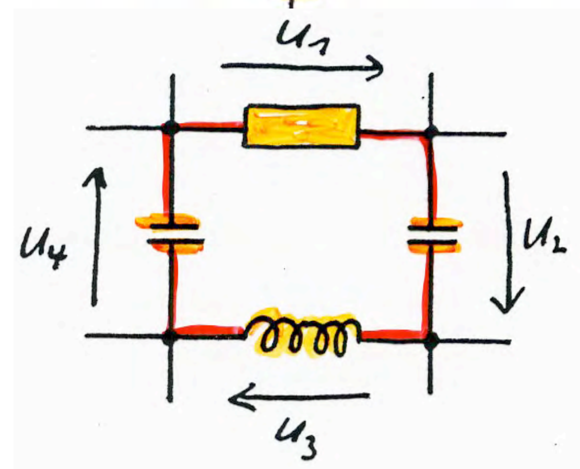
Noeuds **le courant électrique est une grandeur conservée**

$$\boxed{\sum_{nodes} i_n = 0}$$

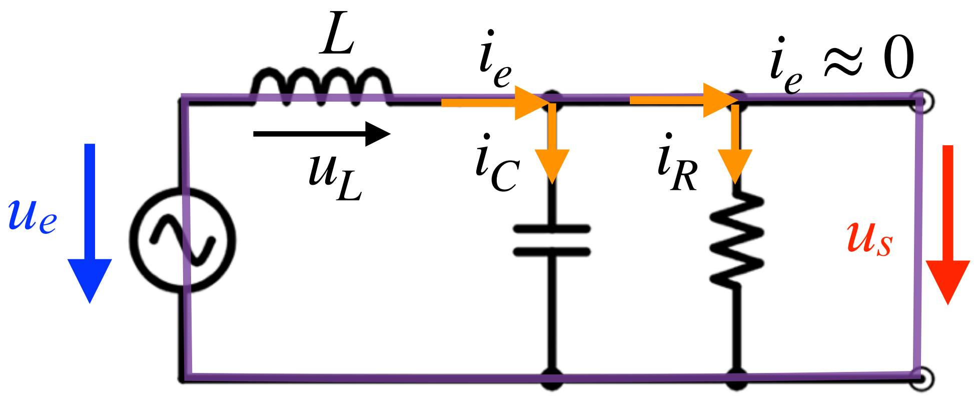


Mailles **la tension électrique est un potentiel**

$$\boxed{\sum_{Mailles} u_n = 0}$$



EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU CIRCUIT RCL



$$\boxed{u_L + u_s = u_e} \quad 1)$$

$$\boxed{i_e = i_R + i_C} \quad 2)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_L = L\dfrac{di_e}{dt} & 3) \\ u_s = Ri_R & 4) \\ i_C = C\dfrac{du_s}{dt} & 5) \end{array} \right.$$

équations constitutives

$$1) + 3) \Rightarrow \quad L\frac{di_e}{dt} + u_s = u_e$$

$$2) \Rightarrow \quad L\left(\frac{di_R}{dt} + \frac{di_C}{dt}\right) + u_s = u_e$$

$$4) + 5) \Rightarrow \quad \frac{L}{R}\frac{du_s}{dt} + LC\frac{d^2u_s}{dt^2} + u_s \quad u_e$$

$$\boxed{\frac{d^2u_s}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{du_s}{dt} + \frac{1}{LC}u_s = \frac{1}{LC}u_e}$$

EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU CIRCUIT RCL

$$\boxed{\frac{d^2u_s}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{du_s}{dt} + \frac{1}{LC}u_s = \frac{1}{LC}u_e}$$

Introduisons alors les grandeurs définies comme suit

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{2RC} & \textbf{coefficient d'amortissement} \\ \omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC}} & \textbf{pulsation propre du circuit} \end{cases}$$

Grâce à ces nouveaux paramètres, on peut écrire l'équation différentielle sous la forme suivante:

$$\boxed{\frac{d^2u_s}{dt^2} + 2\lambda\frac{du_s}{dt} + \omega_0^2 u_s = \omega_0^2 u_e}$$

On obtient *"l'équation de l'oscillateur harmonique amorti"*.

Toute équation différentielle de ce type possède une solution qui est la somme:

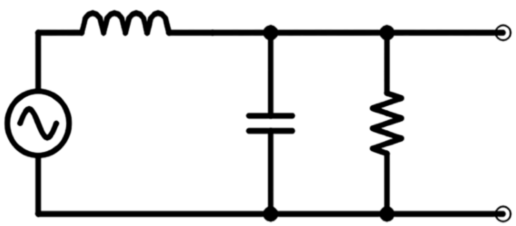
- **d'une solution transitoire** correspondant à la réponse transitoire de la sortie $u_S(t)$, et calculée comme la solution de l'équation différentielle sans second membre (avec $u_e = 0$),
- **d'une solution permanente** (solution particulière) correspondant à la réponse permanente $u_S(t)$ à une entrée $u_e(t)$ donnée.

SOLUTIONS PERMANENTES (oscillations forcées)

$$\boxed{\frac{d^2u_s}{dt^2} + 2\lambda\frac{du_s}{dt} + \omega_0^2 u_s = \omega_0^2 u_e}$$

Signal d'entrée continu

$$u_e(t) = u_{eo} \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_s(t) = u_{eo}}$$



Signal d'entrée harmonique

$$u_e(t) = u_{eo}\sin(\Omega t)$$ où Ω = pulsation du signal appliqué

$$\Rightarrow \quad \boxed{u_s(t) = u_{so}(\Omega)\sin(\Omega t - \psi)}$$

avec

$$\begin{cases} \psi = \arctan\dfrac{2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \\ u_{so}(\Omega) = \dfrac{\omega_0^2 u_{eo}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}} \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{1}{2RC}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

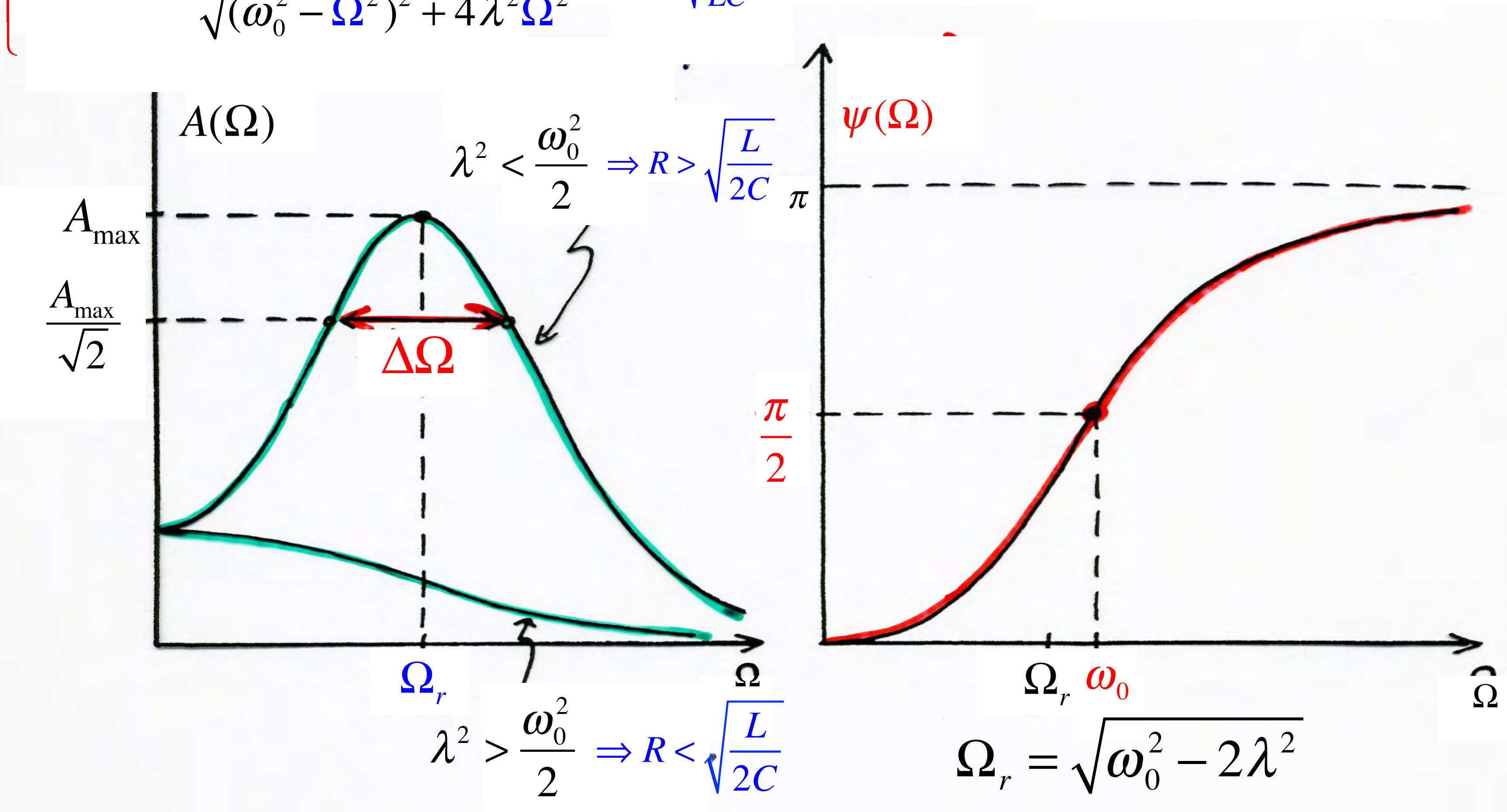
SOLUTIONS PERMANENTES (oscillations forcées)

$$\left\{\begin{array}{l} \psi = \arctan \dfrac{2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \\[2ex] u_{so}(\Omega) = \dfrac{\omega_0^2 u_{eo}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}} \end{array}\right.$$

$$\lambda = \frac{1}{2RC} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

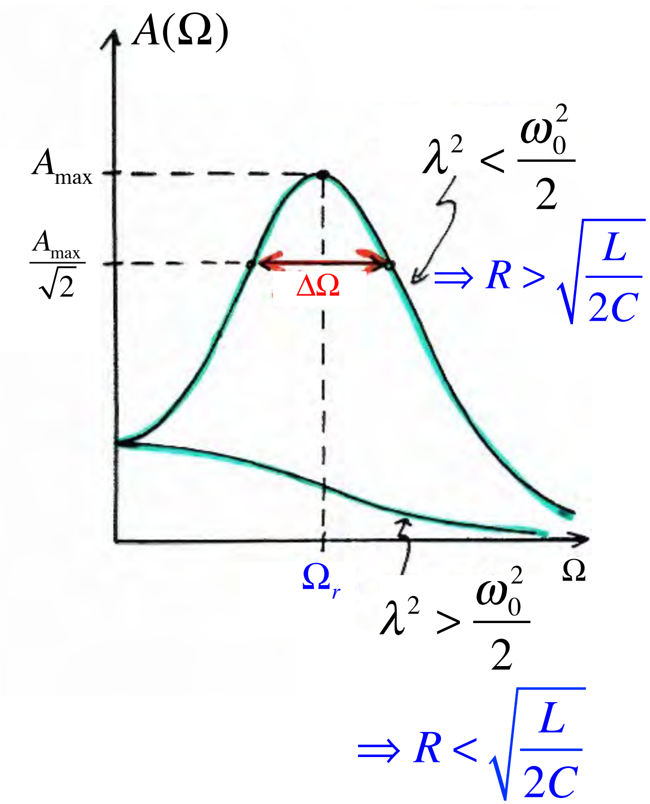
Gain A:

$$A(\Omega) = \frac{u_{so}(\Omega)}{u_{eo}}$$



$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$$

SOLUTIONS PERMANENTES (oscillations forcées)



Pour l'amortissement faible, l'amplitude $A(\Omega)$ passe par un maximum pour $\Omega = \Omega_r$ tel que

$$\boxed{\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}}$$

(fréquence angulaire de résonance)

On parle alors d'un **phénomène de résonance**, et la **largeur de résonance** $\Delta\Omega$, mesurée pour $A(\Omega) = A_{max}/2^{1/2}$, vaut:

$$\boxed{\Delta\Omega = 2\lambda\omega / \Omega_r}$$

(largeur de bande, bande passante)

On peut encore introduire la notion de **facteur de qualité Q** du circuit, défini par la relation

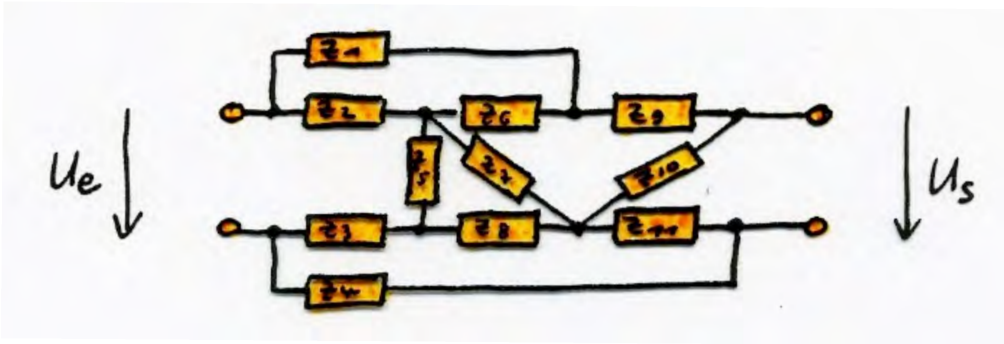
$$\boxed{Q = \frac{\Omega_r}{\Delta\Omega} = \frac{\Omega_r^2}{2\lambda\omega}}$$

(facteur de qualité, coefficient de surtension)

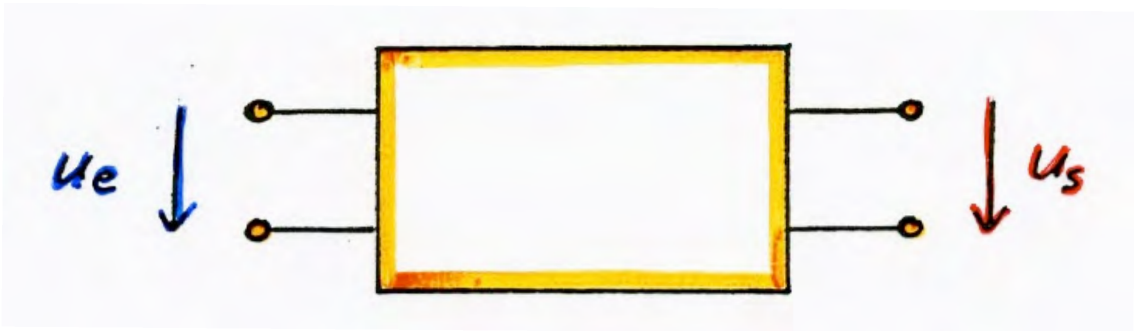
Q mesure en fait **l'acuité de résonance** ou **sélectivité** du circuit résonnant.

QUADRIPOLES

Soit un réseau compliqué qu'on appelle **un quadripôle**, de par l'existence de deux bornes d'entrée et de deux bornes de sortie:



Un tel réseau peut être représenté par la "boîte noire" suivante :



Si on impose une tension d'entrée $\mathbf{u_e(t)}$, la sortie $\mathbf{u_s(t)}$ sera appelée **la réponse** du quadripôle.

REPONSE CONTINUE DES QUADRIPOLES

Si le réseau est constitué de résistances, de condensateurs et de selfs, ce sont uniquement les résistances qui fixeront la tension de sortie (self = court-circuit, condensateur = circuit ouvert), d'où

$$u_e(t) = constant \quad \Rightarrow \quad u_s(t) = constant$$

En réponse continue, on appelle **gain A du circuit quadripôle** la grandeur:

$$\boxed{A = \frac{u_s}{u_e}}$$

REPONSE HARMONIQUE DES QUADRIPOLES

Si l'on impose la tension d'entrée harmonique, la réponse, *dans le cas où le circuit est linéaire*, est du type

$$u_e = u_{eo} \sin(\omega t) \quad \Rightarrow \quad u_s = u_{so} \sin(\omega t + \varphi)$$

Cette réponse peut être caractérisée par **la fonction de transfert du quadripôle**. Cette fonction de transfert joue un rôle très important en électronique (amplificateurs, filtres, réglages automatiques, etc.).

REPONSE HARMONIQUE DES QUADRIPOLES

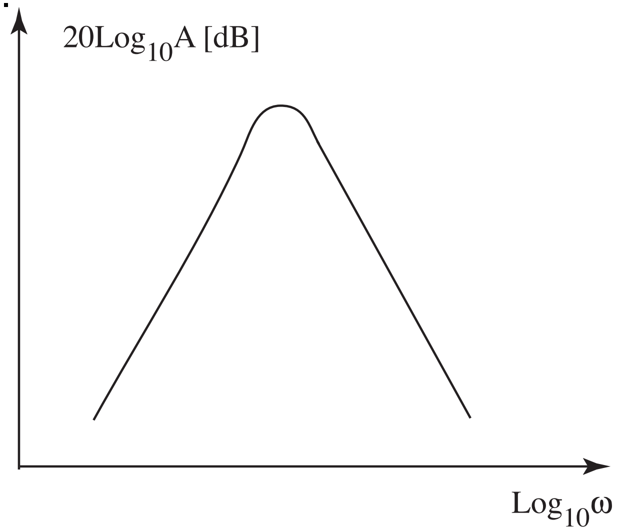
Représentation réelle de la fonction de transfert: le diagramme de Bode

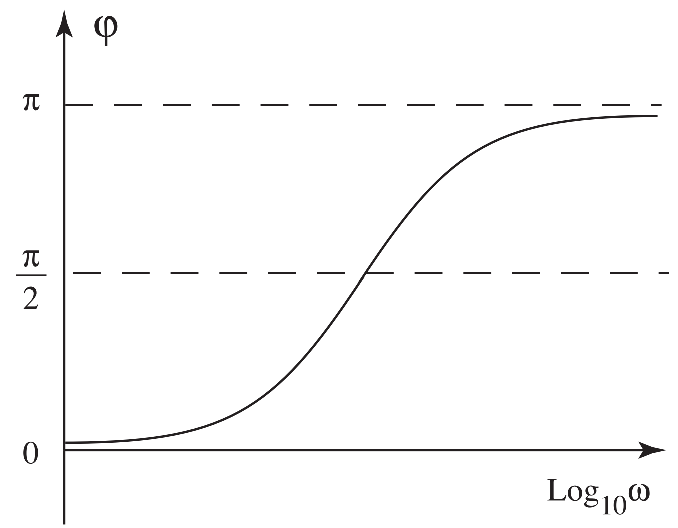
La représentation réelle de la fonction de transfert fait appel aux gain A et à la phase respectivement, donnés en fonction de la fréquence du signal d'entrée:

$$A(\omega) = \frac{u_{so}(\omega)}{u_{eo}}$$

$$\varphi(\omega) = \text{ phase of } u_s / u_e$$

En général, on représente graphiquement **20 log10 A** dans un diagramme en fonction du logarithme de la pulsation. Un tel diagramme, appelé *diagramme de Bode*, a l'avantage de présenter en général des droites. On exprime la pente de ces droites en dB/octave, un octave correspondant à un doublement de la fréquence.

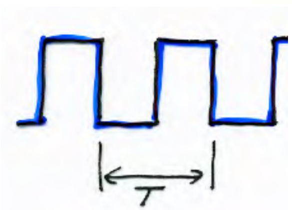




REPONSE HARMONIQUE DES QUADRIPOLES: LA TRANSFORMEE DE FOURIER (facultatif)

Lorsqu'on recherche la réponse d'un circuit quadripôle à un signal périodique quelconque (signal carré, triangulaire, etc.), on peut employer la transformation de Fourier, qui est basée sur la propriété mathématique suivante:

Tout signal périodique de période T peut être décomposé **en somme de sinus et cosinus aux fréquences harmoniques** de la fréquence de base du signal, sous la forme



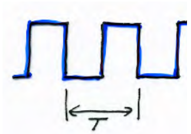
$$\boxed{u_e(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)}$$

Les coefficients a_n et b_n se calculent par les intégrales suivantes:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T u_e(t)\cos(n\omega t)\,dt \qquad n = 0,\cdots,\infty$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T u_e(t)\sin(n\omega t)\,dt \qquad n = 1,\cdots,\infty$$

REPONSE HARMONIQUE DES QUADRIPOLES: LA TRANSFORMEE DE FOURIER

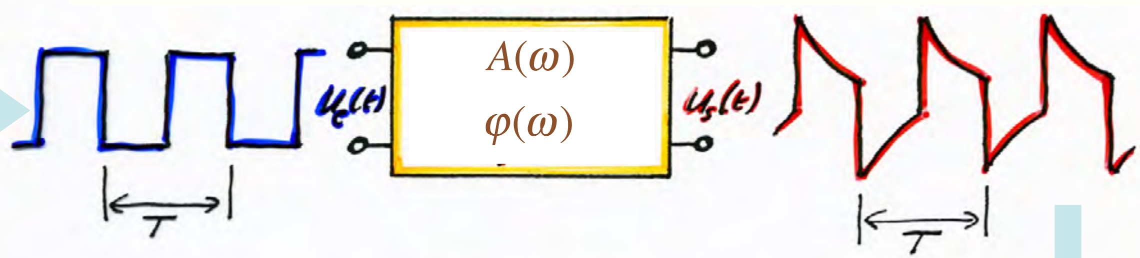


$$u_e(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

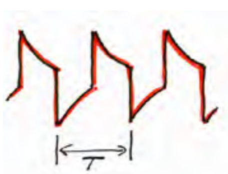
$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T u_e(t)\cos(n\omega t)\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T u_e(t)\sin(n\omega t)\,dt$$

Si le signal **ue(t)** est appliqué à un quadripôle avec une fonction de transfert connue



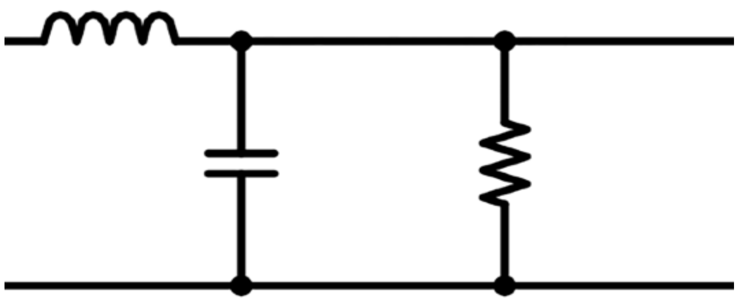
La réponse **us(t)** sera simplement donnée par:

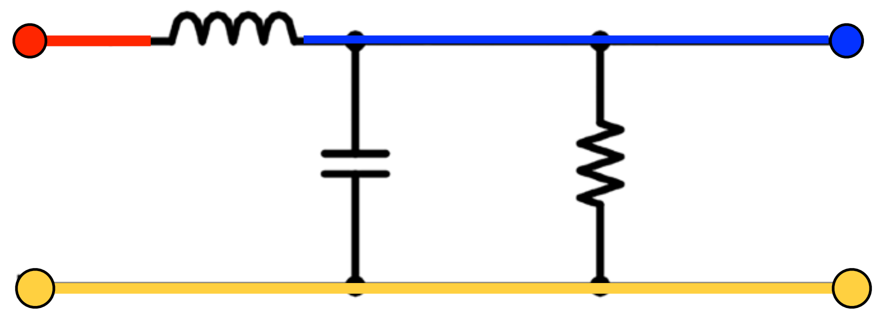


$$u_s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A(n\omega)\cos(n\omega t + \varphi(n\omega)) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n A(n\omega)\sin(n\omega t + \varphi(n\omega))$$

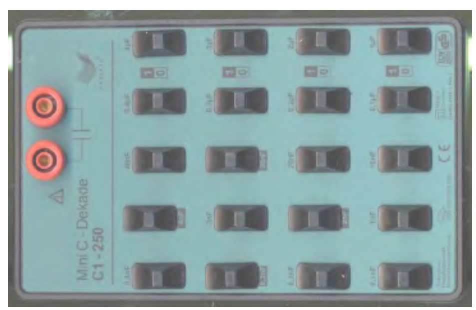
…qui est la représentation de Fourier du signal périodique de période T présent à la sortie $u_S(t)$.

MONTAGE DU CIRCUIT RCL SERIE

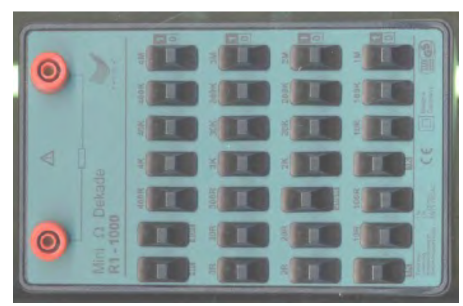




L

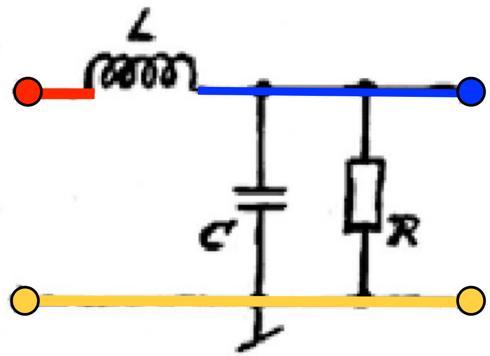


C



R

SIMULATION DU CIRCUIT



Simulation 100 Hz

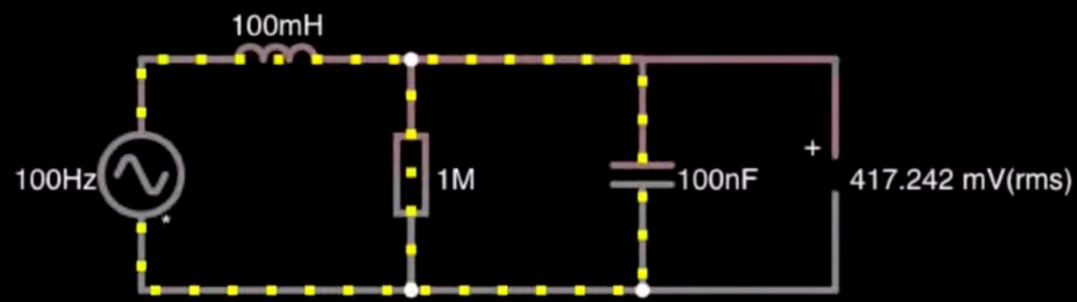
http://tinyurl.com/s4cdf7f

Simulation 3 KHz

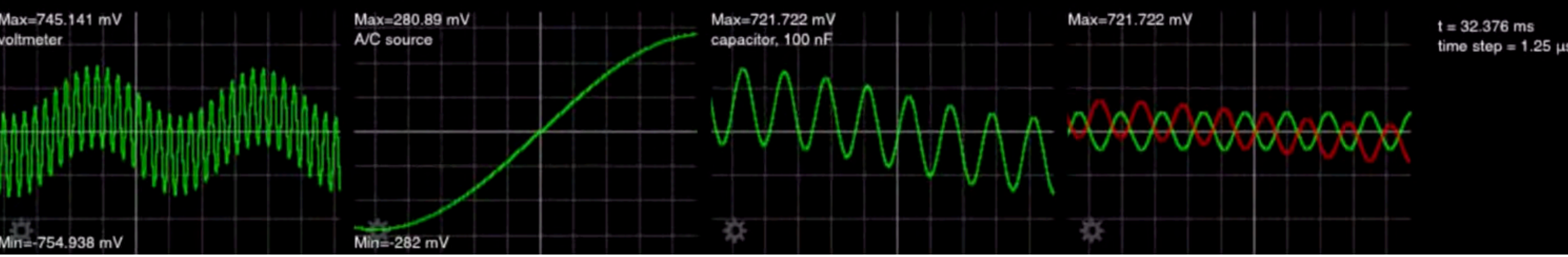
https://tinyurl.com/ygawf76u

Simulation Oscillateur libre

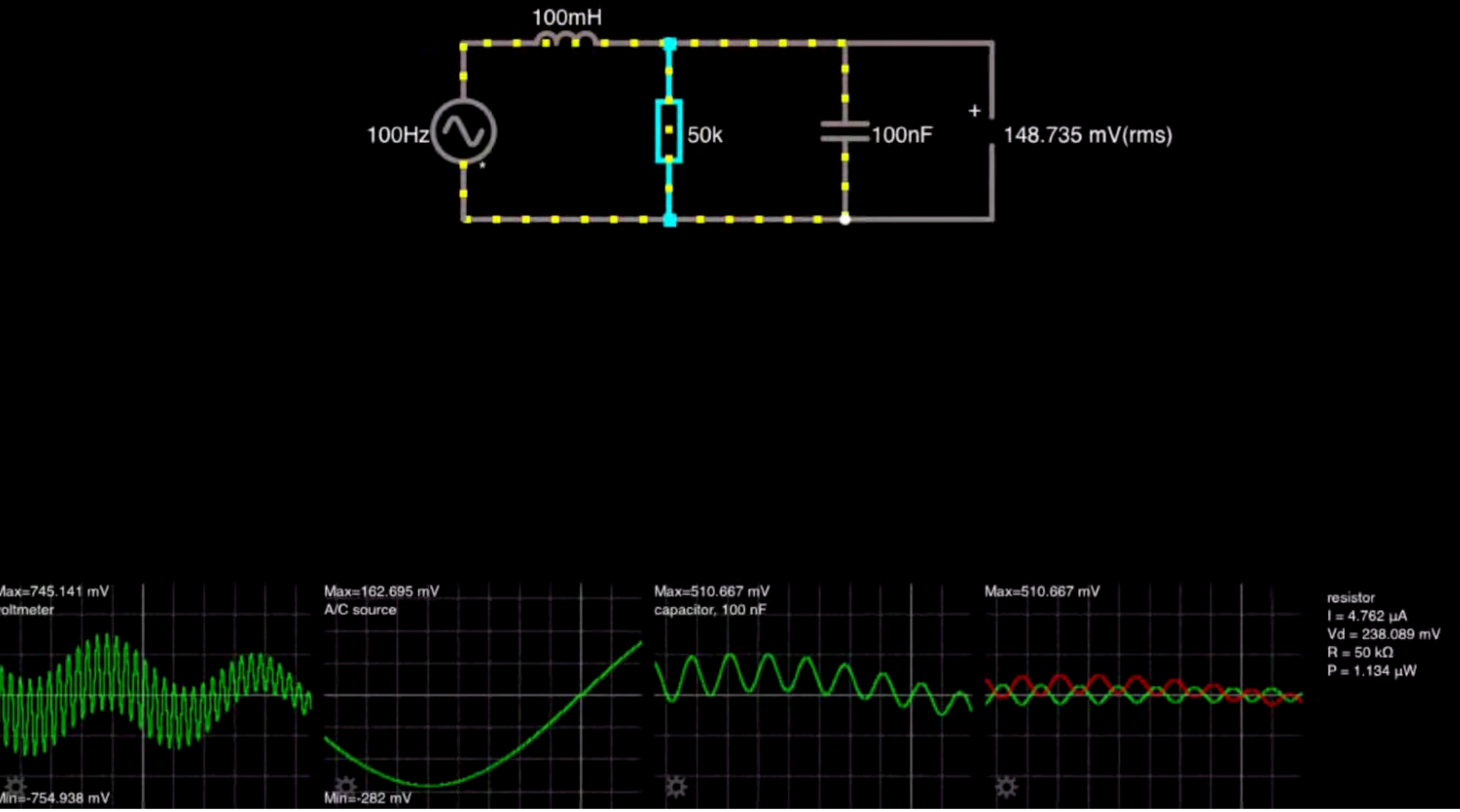
https://tinyurl.com/ygrvwahf

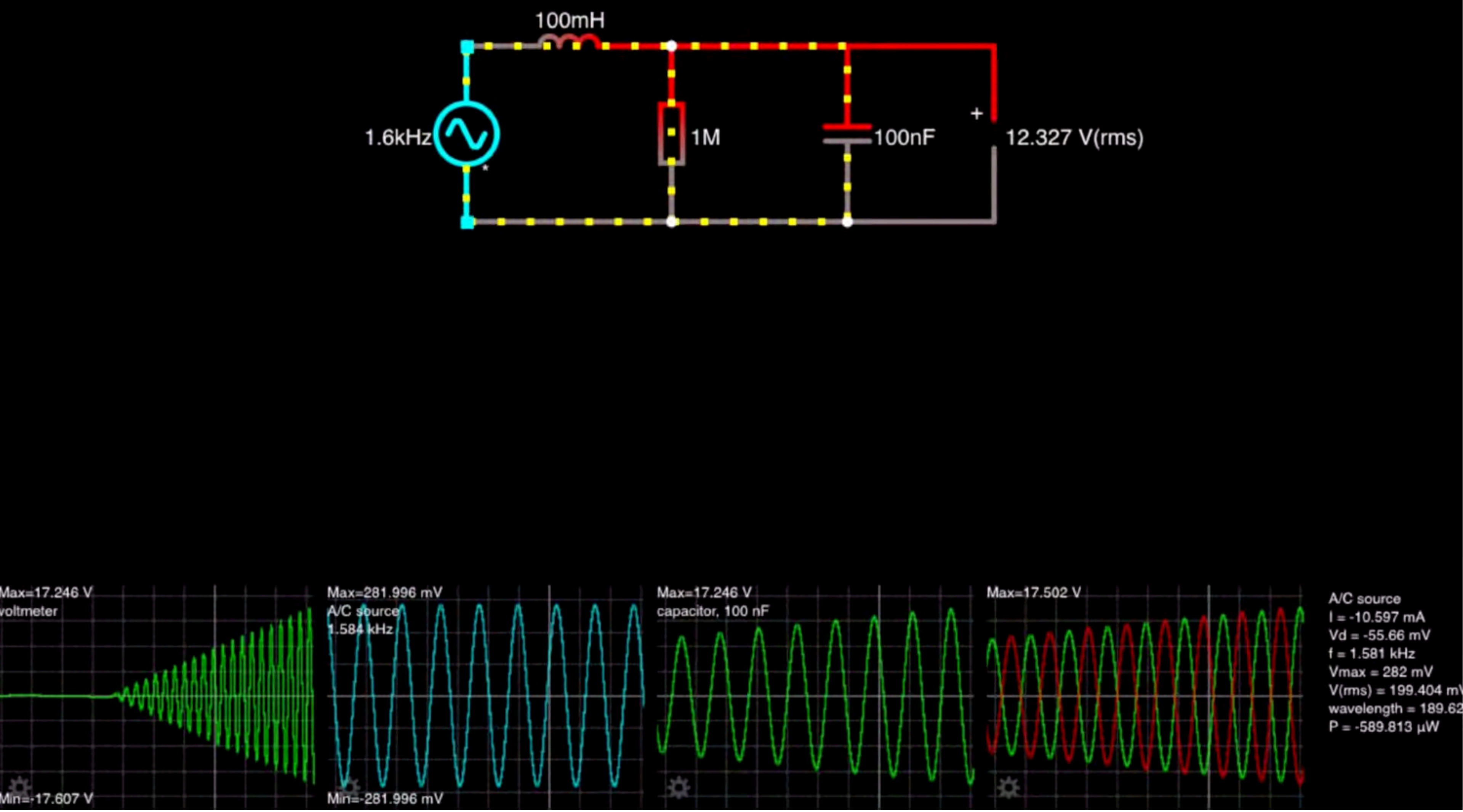


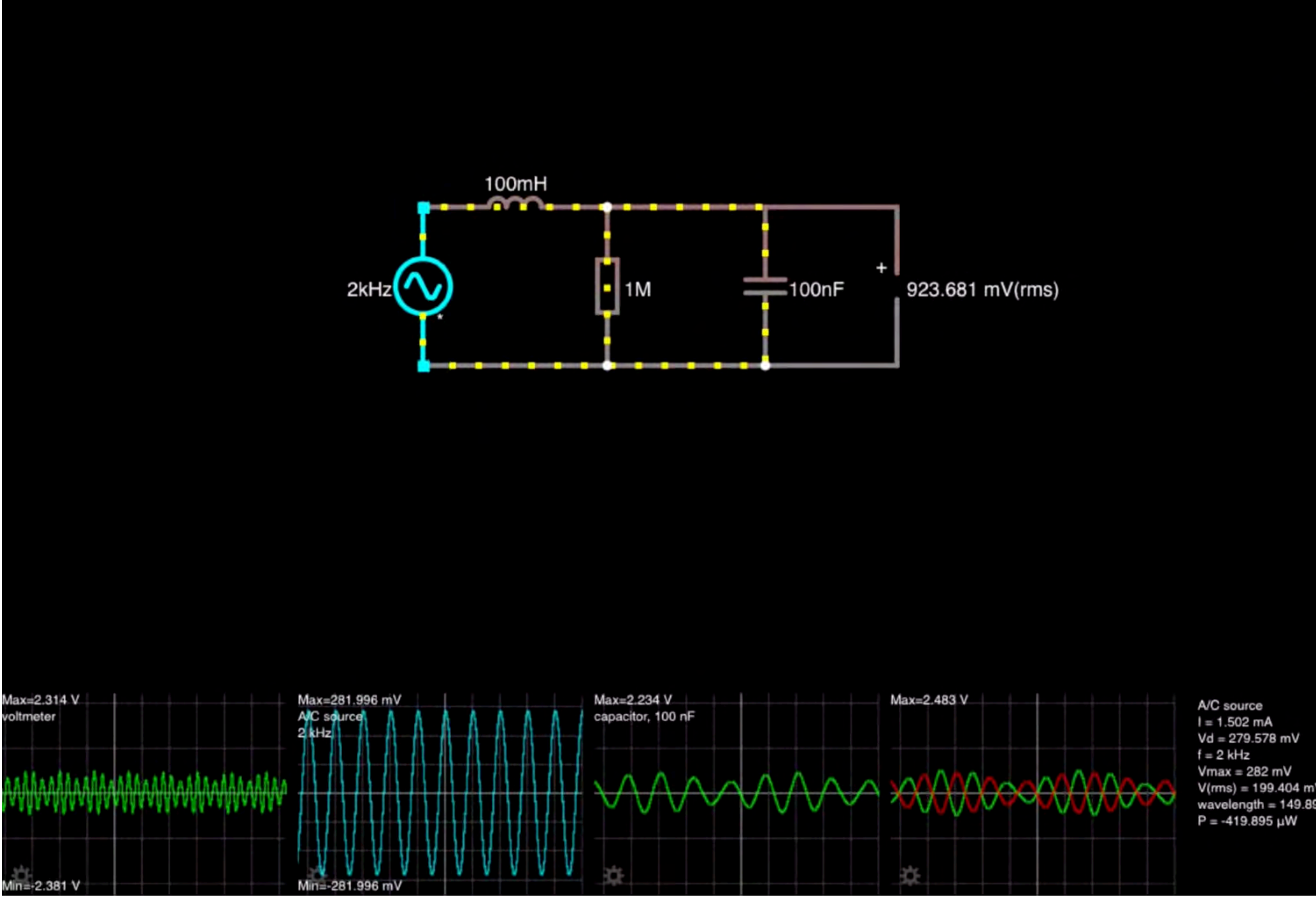
100mH
100Hz
1M
100nF
+
417.242 mV(rms)



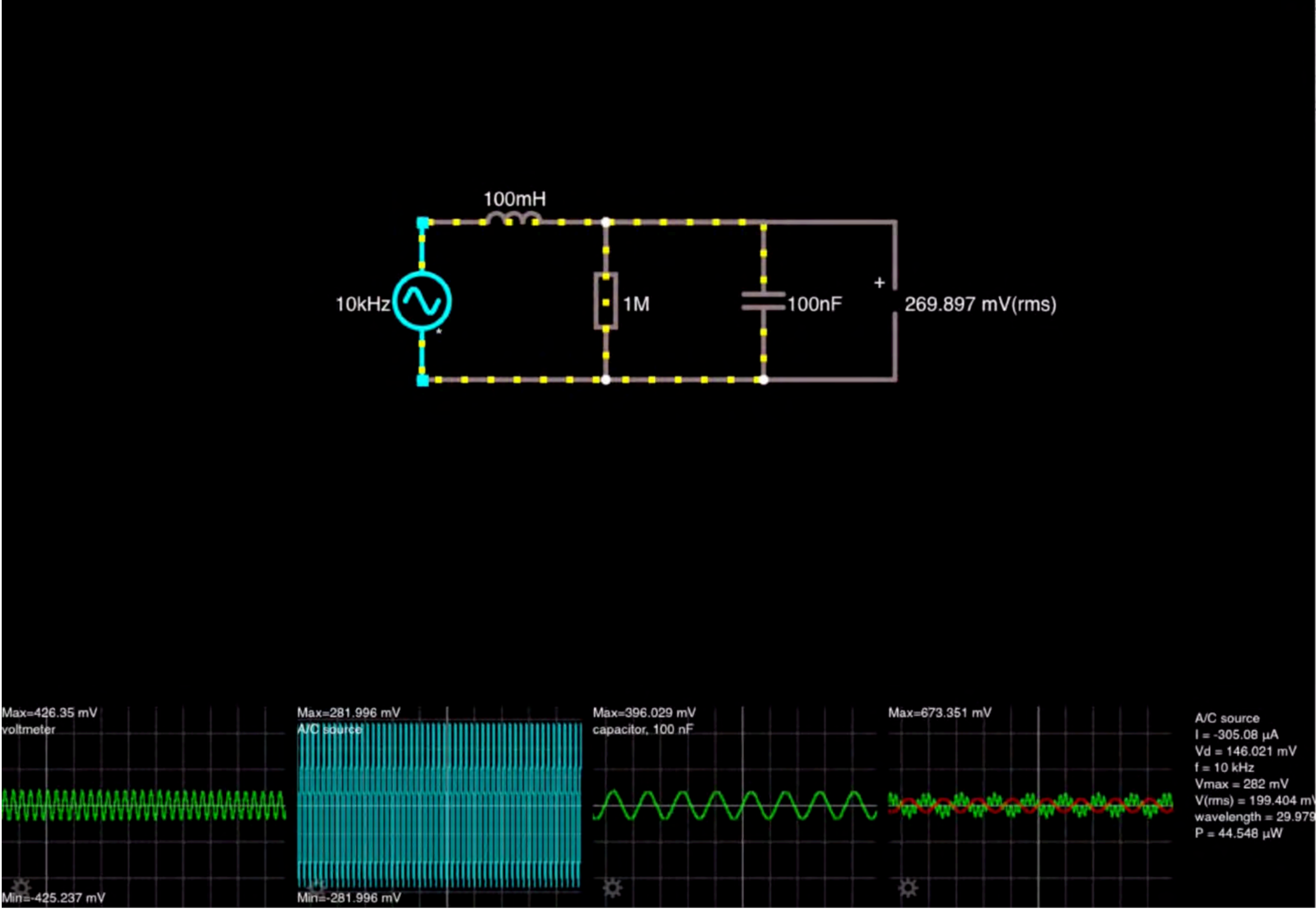
Max=745.141 mV
voltmeter
Min=-754.938 mV
Max=280.89 mV
A/C source
Min=-282 mV
Max=721.722 mV
capacitor, 100 nF
Max=721.722 mV
t = 32.376 ms
time step = 1.25 µs


100mH
100Hz
50k
100nF
+
148.735 mV(rms)
Max=745.141 mV
oltmeter
Min=-754.938 mV
Max=162.695 mV
A/C source
Min=-282 mV
Max=510.667 mV
capacitor, 100 nF
Max=510.667 mV
resistor
I = 4.762 µA
Vd = 238.089 mV
R = 50 kΩ
P = 1.134 µW


100mH
1.6kHz
1M
100nF
+
12.327 V(rms)
Max=17.246 V
voltmeter
Min=-17.607 V
Max=281.996 mV
A/C source
1.584 kHz
Min=-281.996 mV
Max=17.246 V
capacitor, 100 nF
Max=17.502 V
A/C source
I = -10.597 mA
Vd = -55.66 mV
f = 1.581 kHz
Vmax = 282 mV
V(rms) = 199.404 m
wavelength = 189.62
P = -589.813 µW



100mH
2kHz
1M
100nF
+
923.681 mV(rms)
Max=2.314 V
voltmeter
Min=-2.381 V
Max=281.996 mV
A/C source
2 kHz
Min=-281.996 mV
Max=2.234 V
capacitor, 100 nF
Max=2.483 V
A/C source
I = 1.502 mA
Vd = 279.578 mV
f = 2 kHz
Vmax = 282 mV
V(rms) = 199.404 m
wavelength = 149.89
P = -419.895 μW


100mH
10kHz
1M
100nF
+
269.897 mV(rms)
Max=426.35 mV
voltmeter
Min=-425.237 mV
Max=281.996 mV
A/C source
Min=-281.996 mV
Max=396.029 mV
capacitor, 100 nF
Max=673.351 mV
A/C source
I = -305.08 μA
Vd = 146.021 mV
f = 10 kHz
Vmax = 282 mV
V(rms) = 199.404 m
wavelength = 29.979
P = 44.548 μW